3°/ $\vec{M_0F}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\cos t_0\\ -\sin t_0\end{pmatrix}$; $\vec{FK}\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}-2\cos t_0}{\sqrt{3}\sin t_0}\end{pmatrix}$

$$\vec{M_0F}\cdot\vec{FK}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-2\cos t_0)-\frac{(\sqrt{3}-2\cos t_0)}{\sqrt{3}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t_0-1+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t_0=0\Rightarrow (M_0F)\perp(FK)$$

Solution 4 :

1°/ on a : $y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2$ or $c^2=a^2+b^2$ d'où $y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)(c^2-a^2)$

$$MF^2=(x-c)^2+y^2$$

$$MF^2=(x-c)^2+(x^2-a^2)(\frac{c^2}{a^2}-1)$$

$$=x^2-2cx+c^2+\frac{x^2c^2}{a^2}-x^2-c^2+a^2$$

$$=\frac{x^2c^2}{a^2}-2cx+a^2=\frac{c^2}{a^2}\left[x^2-\frac{2a^2x}{c}+\frac{a^4}{c^2}\right]$$

$$=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2 \quad \text{or } MH^2=\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2 \text{ d'où } \frac{MF}{MH}=\frac{c}{a}$$

2°/ Soit $M(x_0,y_0)$ avec $y_0\neq 0$.

Soit T la tangente à $(\mathcal{H})$ en M. $\quad T:\ \dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

Soit $K(x,y)\in T\cap D$

$$\begin{cases}\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1 & (*)\\ x=\dfrac{a^2}{c} & (**)\end{cases}$$